

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Препринт КИЯИ-92-8

В.И.Третяк

АЛГОРИТМЫ МОНТЕ-КАРЛО В ЗАДАЧЕ
МОДЕЛИРОВАНИЯ 2β -РАСПАДА И
ПРОХОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ЧЕРЕЗ
ВЕЩЕСТВО

КИЕВ

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Препринт КИИИ-92-8

В.И. ТРЕТЯК

АЛГОРИТМЫ МОНТЕ-КАРЛО В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ
 2β -РАСПАДА И ПРОХОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

Київ 1992

Алгоритмы Монте-Карло в задаче моделирования 2β -распада и прохождения электронов через вещество/ Третьяк В.И. - Киев, 1992.- 12 с.- (Препр./АН Украины. Ин-т ядерных исследований; КИЯИ-92-8).

Описаны алгоритмы получения случайных чисел с плотностями вероятности, которые возникают в задачах моделирования 2β -распада и прохождения электронов через вещество (начальные пространственные, угловые и энергетические распределения электронов, отклонения в результате многократного рассеяния, потери энергии и др.).

Ил. 1. Список лит.: с. 11 (23 назв.).

Monte Carlo algorithms in simulation of 2β -decay and penetration of electrons through matter/ Tretyak V.I. - Kiev, 1992.-12 p.- (Prepr./Ukrainian Academy of Sciences. Institute for Nuclear Research; KINR-92-8).

The algorithms are described what are used to sample the random variables with probability density functions which are connected with problems of simulation of 2β -decay and electron penetration through matter (the initial spacial, angular and energy distributions of electrons, angular deflections as the result of multiple scattering, energy losses etc.).

1 fig., 23 refs.

Утверждено к печати ученым советом
Института ядерных исследований АН Украины

© В.И.Третьяк, 1992

В данной работе описаны конкретные схемы получения случайных чисел с плотностями вероятности, которые встречаются в задачах моделирования двойного бета-распада и прохождения электронов через вещество. Эти плотности описывают начальные пространственные, угловые и энергетические распределения электронов, отклонения в результате многократного рассеяния, потери энергии и др. Представленные алгоритмы использовались в работах [1,2] при моделировании угловых и энергетических распределений электронов, прошедших через слой вещества, и вычисления функции отклика установок с HPGe , Si(Li) и C_8H_8 детекторами к событиям 2β -распада ^{100}Mo .

Методы получения случайных чисел с заданной плотностью вероятности основаны на использовании случайных чисел, равномерно распределенных в диапазоне $[0,1]$; в дальнейшем они будут обозначаться α . Так как генераторы α есть в стандартном программном обеспечении ЭВМ, методы их получения не рассматриваются. Они приведены в [3-8], равно как и математические доказательства встречающихся ниже утверждений.

1. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ВЕРОЯТНОСТИ. Приведены только основные методы, нужные для дальнейшего изложения.

1.1. Метод Неймана (метод отбора) [9]. Пусть случайная величина x определена на конечном интервале $[a,b]$ с ограниченной плотностью вероятности (далее - просто плотностью) $\rho(x) \leq \rho_{\max}$. Алгоритм получения x выглядит следующим образом:

- (1) выбросим два равномерно распределенных в $[0,1]$ числа α_1 и α_2 ;
- (2) образуем $t = a + (b-a)\alpha_1$ и $y = \rho_{\max}\alpha_2$; (A.1)
- (3) если $y > \rho(t)$, то вернемся на (1), если $y \leq \rho(t)$, то примем $x = t$.

Если нарисовать график $\rho(x)$, то ясно, что в (2) выбрасывается равномерно распределенная в прямоугольнике $x \in [a,b]$, $y \in [0, \rho_{\max}]$ точка. Величина x принимается, если эта точка попадает под график $\rho(x)$. Метод работает тем быстрее, чем больше площадь под кривой $\rho(x)$ в прямоугольнике. Плотность $\rho(x)$ может быть не нормированной.

1.2. Метод обратных функций. Случайную величину x с плотностью $\rho(x)$ можно получить, решая относительно x уравнение

$$\alpha = \int_{-\infty}^x \rho(t) dt. \quad (A.2)$$

Плотность $\rho(x)$ должна быть нормирована на 1. Метод предпочтителен, если интеграл берется аналитически и полученное уравнение легко

решить относительно x , однако возможны и численные взятие интеграла и решение уравнения. Для получения одного значения x нужно всего одно выбрасывание α .

1.3. Если величина x принимает дискретные значения (x_1, x_2, \dots, x_n) с вероятностями (p_1, p_2, \dots, p_n), то метод ее разыгрывания состоит в следующем: (A.3)

- (1) выбросим α ;
- (2) найдем такой номер i , для которого $p_0 + p_1 + \dots + p_{i-1} \leq \alpha < p_0 + p_1 + \dots + p_i$ ($p_0 = 0$);
- (3) $x = x_i$.

Должно выполняться $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Промежуточные суммы лучше вычислить заранее, а p_i лучше расположить по убыванию - схема будет работать быстрее.

1.4. Метод суперпозиции [10]. Пусть плотность $\rho(x)$ представлена в виде суперпозиции частных плотностей $\rho_i(x)$:

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \rho_i(x), \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho_i(t) dt = 1. \quad (A.4)$$

Схема получения случайной величины x :

- (1) выбросим α и определим номер i аналогично (A.3);
 - (2) по данной $\rho_i(x)$ разыграем x согласно методам (A.1) или (A.2).
- 1.5. Обобщенный метод Наймана. Пусть $\rho(x) = a \cdot \rho_1(x) \cdot g(x)$, где $\rho(x)$ и $\rho_1(x)$ нормированы на 1 и $0 \leq g(x) \leq 1$. Величину x получим по схеме:

- (1) выбросим t по плотности $\rho_1(x)$ согласно (A.1) или (A.2);
- (2) выбросим $y = \alpha$;
- (3) если $y > g(t)$, то вернемся на шаг (1); если $y \leq g(t)$, примем $x = t$.

1.6. Смешанный метод [11] обобщает методы (A.4) и (A.5). Пусть $\rho(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \rho_i(x) \cdot g_i(x)$. Величину x разыграем по схеме:

- (1) выберем номер i согласно (A.3) ($p_i = a_i / \sum_{i=1}^n a_i$);
- (2) разыграем t согласно $\rho_i(x)$ и выбросим $y = \alpha$;
- (3) если $y > g_i(t)$, то вернемся на (1); если $y \leq g_i(t)$, примем $x = t$.

Для того чтобы этим методом можно было воспользоваться, должны выполняться условия: $a_i > 0$, $\int \rho_i(t) dt = 1$, $0 \leq g_i(t) \leq 1$. Среднее число попыток выбрасывания x равно $\sum_{i=1}^n a_i$. Метод хорош, если t разыгрывается по $\rho_i(x)$ легко, $g_i(t)$ быстро вычисляются, $\sum a_i$ не очень велика.

1.7. Из-за частой необходимости в нормально распределенных числах приведем один из самых коротких в смысле программирования (но не времени работы) алгоритмов получения нормально распределенного числа $v(0,1)$ со средним $\mu=0$ и отклонением $\sigma=1$. Всего по двум выброшенным a_1 и a_2 можно получить тоже два $v(0,1)$:

$$v_1(0,1) = \sqrt{-2 \ln(a_1)} \cdot \sin(2\pi a_2), \quad v_2(0,1) = \sqrt{-2 \ln(a_1)} \cdot \cos(2\pi a_2). \quad (A.7)$$

Нормальное число с произвольными μ и σ : $v(\mu, \sigma) = \mu + \sigma \cdot v(0,1)$.

Выбор конкретной схемы розыгрыша x из (A.1)-(A.6) зависит от вида плотности $\rho(x)$ и быстродействия ЭВМ по математическим операциям и генерации a .

Приведем теперь конкретные алгоритмы получения различных случайных величин в задачах моделирования двойного бета-распада и прохождения электронов через вещество.

2. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ 2 β -РАСПАДА. Предполагается, что источник однороден. В геометрии, если образец - параллелепипед с размерами a, b, c (начало системы координат - в нижнем левом углу его, в оси направлены по ребрам), то:

$$(1) \quad x = a \cdot a_1, \quad y = b \cdot a_2, \quad z = c \cdot a_3. \quad (A.8)$$

Если образец - цилиндр с радиусом r и высотой c (начало системы координат - в центре нижней грани), то:

$$(1) \quad \varphi = 2\pi \cdot a_1, \quad \rho = r \cdot \sqrt{a_2}; \quad (A.9)$$

$$(2) \quad x = \rho \cdot \cos \varphi, \quad y = \rho \cdot \sin \varphi, \quad z = c \cdot a_3.$$

3. НАЧАЛЬНЫЕ УГЛОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ. Считаем, что направление движения одного из электронов распределено в пространстве изотропно, а угол θ разлета электронов описывается плотностью $\rho(\theta)$. Если направления электронов определяются углами θ_1, φ_1 и θ_2, φ_2 ($0 \leq \theta_1 \leq \pi, 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$), то угол θ связан с ними:

$$\cos \theta = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Алгоритм получения $\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2$: (A.10)

$$(1) \text{ изотропный вылет 1-го электрона } - \varphi_1 = 2\pi a_1, \quad \cos \theta_1 = -1 + 2a_2;$$

$$(2) \text{ изотропный вылет 2-го электрона } - \varphi_2 = 2\pi a_3, \quad \cos \theta_2 = -1 + 2a_4;$$

(3) учет угловой корреляции. По θ_1, φ_1 вычислим $\cos \theta$ и, если нужно, θ . Выбрасываем $y = \rho_{\max} \cdot a_5$. Если $y > \rho(\theta)$, то возвращаемся на (2), если $y \leq \rho(\theta)$, принимаем выброшенные θ_1 и φ_1 .

4. НАЧАЛЬНЫЕ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ В РАЗНЫХ МЕХ. ВЕЩАХ 2 β -РАСПАДА. Пусть E_1 - кинетическая энергия 1-ого электрона, E_0 - энергия 2 β распада, $\epsilon_1 = E_1/m_e c^2, \epsilon_0 = E_0/m_e c^2, m_e c^2$ - масса покоя

электрона. Дальше ρ_{\max} обозначает максимальное значение соответствующей плотности вероятности $\rho(x)$. Его нужно найти до начала розыгрыша аналитически или численно (при сложных $\rho(x)$). Для последней цели мы используем подпрограмму поиска экстремума функции на отрезке $[a, b]$ методом золотого сечения [12].

4.1. $\nu\beta\beta$ -распад. В безнейтринном двойном бета-распаде суммарная энергия электронов сохраняется, поэтому достаточно разыграть только одну из них по плотности вероятности для энергии одного электрона $\rho(\epsilon_1)$. Применяется метод Наймана (A.1):

(1) выбросим $\epsilon_1 = \epsilon_0 \cdot \alpha_1$ и $y = \rho_{\max} \cdot \alpha_2$; (A.11)

(2) если $y > \rho(\epsilon_1)$, то вернемся на (1); если $y \leq \rho(\epsilon_1)$ - на (3);

(3) $E_1 = \epsilon_1 \cdot m_e c^2$ и $E_2 = E_0 - E_1$.

Для $0\nu 2\beta\beta$ -распада с $\langle m_\nu \rangle \neq 0$, переход $0^+ \rightarrow 0^+$, 2ν -механизм [13]:

$$\rho(\epsilon_1) = (1 + \epsilon_1)^2 (\epsilon_0 + 1 - \epsilon_1)^2, \quad \epsilon_{1\max} = \epsilon_0/2, \quad \rho_{\max} = (\epsilon_0/2 + 1)^4;$$

для $0\nu 2\beta\beta$ -распада с $\langle \lambda \rangle \neq 0$, переход $0^+ \rightarrow 0^+$, 2ν -механизм в приближении $m_e c^2 \ll E_0$ [13]:

$$\rho(\epsilon_1) = (\epsilon_1 + 1)^2 (\epsilon_0 + 1 - \epsilon_1)^2 (\epsilon_0 - 2\epsilon_1)^2, \quad \epsilon_{1\max} = \epsilon_0/2 \pm (\epsilon_0 + 2)/\sqrt{12},$$

$$\rho_{\max} = (\epsilon_0 + 2)^6 / 108.$$

4.2. $2\nu 2\beta\beta$ -распад. В двухнейтринном двойном бета-распаде часть энергии уносится нейтрино, поэтому и энергии одиночных электронов, и их сумма являются случайными величинами с плотностями [13, 14]

$$\rho_1(\epsilon_1) = (\epsilon_1 + 1)^2 (\epsilon_0 - \epsilon_1)^6 [(\epsilon_0 - \epsilon_1)^2 + 8(\epsilon_0 - \epsilon_1) + 28],$$

$$\rho(\epsilon) = \epsilon(\epsilon^4 + 10\epsilon^3 + 40\epsilon^2 + 60\epsilon + 30)(\epsilon_0 - \epsilon)^5, \quad \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2.$$

Энергии электронов не являются независимыми величинами и схемы их розыгрыша типа: разыграем ϵ_1 и ϵ_2 согласно $\rho_1(\epsilon_1)$ или: разыграем ϵ_1 согласно $\rho_1(\epsilon_1)$, ϵ - согласно $\rho(\epsilon)$ и вычислим $\epsilon_2 = \epsilon - \epsilon_1$ - приведут к неудаче - в первом случае своей плотности не будет соответствовать ϵ , во втором - ϵ_2 . В правильной схеме розыгрыша [4] нужно использовать совместную двумерную плотность [13]

$$\rho_{12}(\epsilon_1, \epsilon_2) = (\epsilon_1 + 1)^2 (\epsilon_2 + 1)^2 (\epsilon_0 - \epsilon_1 - \epsilon_2)^5.$$

Алгоритм выглядит следующим образом: (A.12)

(1) разыграем энергию 1-го электрона ϵ_1 согласно плотности $\rho_1(\epsilon_1)$ так же, как это делалось в (A.11); максимальное значение $\rho_{1\max}$ найдем предварительно численным способом. Энергию 2-го электрона получим, используя совместную плотность $\rho_{12}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ при фиксированном ϵ_1 ; множитель $(\epsilon_1 + 1)^2$ в ней можно теперь не учитывать:

- $$\rho_2(\varepsilon_2) = (\varepsilon_2 + 1)^2 (\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)^5;$$
- (2) вычислим $\rho_{2\max} = (2/7)^2 (5/7)^5 (\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + 1)^7;$
 (3) выбросим $\varepsilon_2 = (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \cdot a_1$, $y = \rho_{2\max} \cdot a_2;$
 (4) если $y > \rho_2(\varepsilon_2)$, вернемся на (3), если $y \leq \rho_2(\varepsilon_2)$ - на (5);
 (5) энергии электронов $E_1 = \varepsilon_1 \cdot m_e c^2.$

4.3. ОУМ 2β -распад. При распаде с вылетом майорона с малой энергией электронов также не сохраняются. Известны выражения для плотностей вероятности [13]:

$$\rho_1(\varepsilon_1) = (\varepsilon_1 + 1)^2 [(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + 1)^4 - 4(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + 1) + 3];$$

$$\rho(\varepsilon) = \varepsilon(\varepsilon^4 + 10\varepsilon^3 + 40\varepsilon^2 + 60\varepsilon + 30)(\varepsilon_0 - \varepsilon), \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2;$$

$$\rho_{12}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\varepsilon_1 + 1)^2 (\varepsilon_2 + 1)^2 (\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Плотность вероятности для энергии 2-го электрона ε_2 при фиксированном значении ε_1 и ее максимальное значение

$$\rho_2(\varepsilon_2) = (\varepsilon_2 + 1)^2 (\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad \rho_{2\max} = 4/27 \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + 1)^3.$$

Алгоритм розыгрыша E_1 и E_2 совпадает с (А.12). Результаты для 20000 событий представлены на рисунке.

5. ИОНИЗАЦИОННЫЕ ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ. Плотность распределения ионизационных потерь энергии ΔE_1 электрона в теории Ландау [15] выражается через универсальную функцию φ от безразмерного параметра λ :

$$\rho(\Delta E_1) = \varphi(\lambda) / \xi, \quad \text{где } \lambda = \Delta E_1 / \xi - \lambda.$$

а сама функция $\varphi(\lambda)$ в приближении [16] с учетом резонансных эффектов передачи энергии электронным оболочкам атомов среды

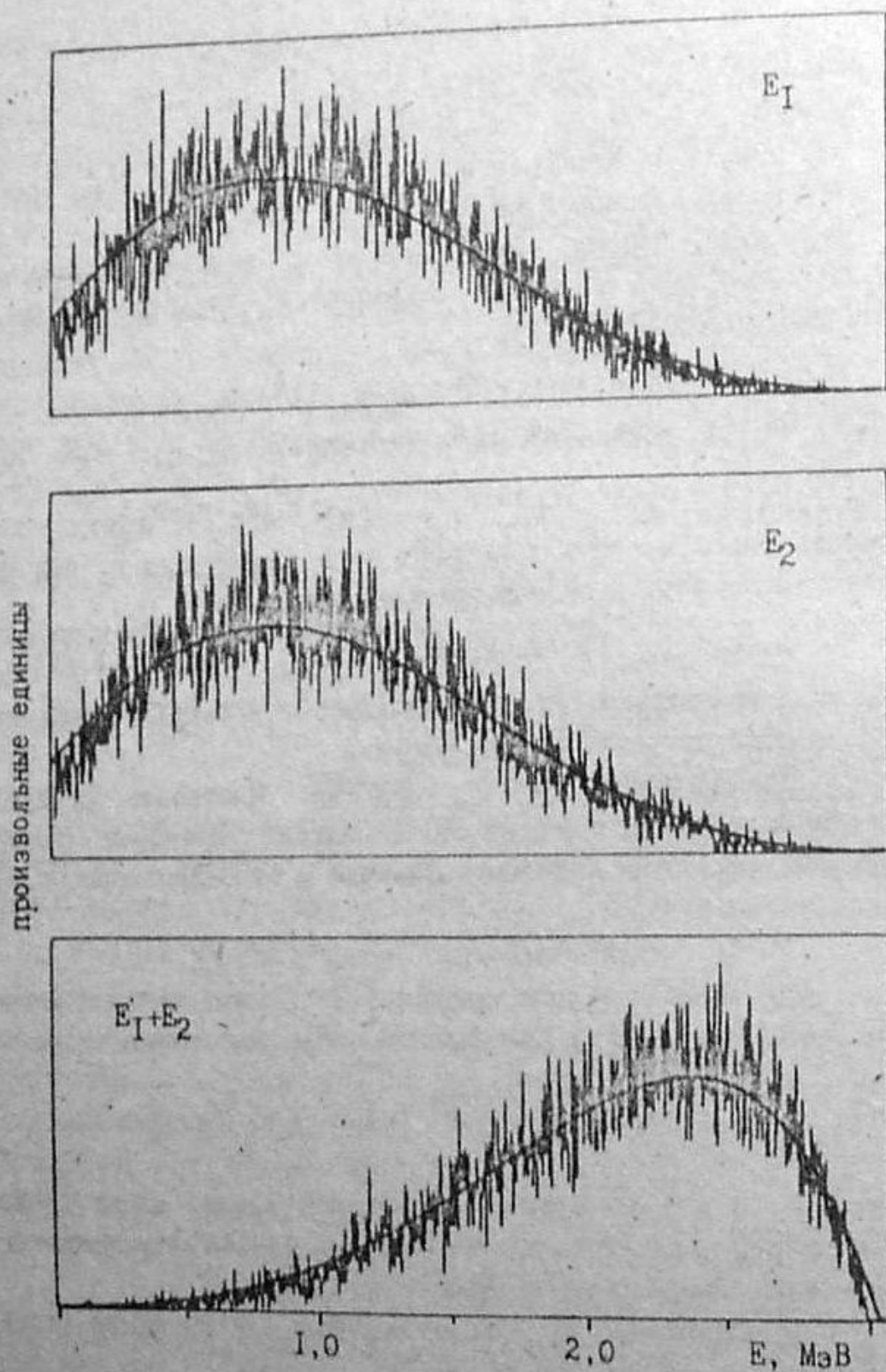
$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^9 \sigma_k \gamma_k / \sqrt{\gamma_k^2 + b^2} \cdot \exp[-(\lambda - \lambda_k)^2 / (\gamma_k^2 + b^2)].$$

Величины ξ , λ и b зависят от параметров среды, длины пройденного пути и энергии электрона и определены в [15,16], а также [1]. Там же приведены значения постоянных $\sigma_1, \gamma_1, \lambda_1.$

Для розыгрыша ΔE_1 используется метод суперпозиции (А.4):

- (1) образуем $p_k = \sigma_k \gamma_k / \sum \sigma_k \gamma_k;$
 (2) выбросим a_1 и найдем номер k , для которого $p_0 + p_1 + \dots + p_{k-1} < a_1 \leq p_0 + p_1 + \dots + p_k$ ($p_0 = 0$);
 (3) разыграем λ по гауссовской плотности с номером k (А.7):

$$\lambda = \lambda_k + \sqrt{(\gamma_k^2 + b^2) / 2} \cdot \sqrt{-2 \ln(a_2)} \cdot \sin(2\pi a_3);$$



Начальные энергии 1-го (E_1) и 2-го (E_2) электронов и их сумма ($E_1 + E_2$): статистические кривые - результаты розыгрыша 20000 событий, гладкие кривые - теоретические плотности вероятности (0,01 распад ^{100}Mo)

(4) определим $\Delta E_1 = (\lambda + A)\xi$. Если $\Delta E_1 < 0$, вернемся на (2).

При определении ρ_1 на шаге (1) нужно учитывать, что частные плотности $\rho_k(\lambda)$ должны быть нормированы: множитель $(\gamma_k^2 + b^2)^{-1/2}$ относится к $\rho_k(\lambda)$, а не к ρ_k .

6. ОТКЛОНЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В РЕЗУЛЬТАТЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ.

Вероятность для электрона рассеяться в элемент телесного угла $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ равна

$$\rho_{GS}(\theta) d\Omega = \rho_{GS}(\theta) \sin\theta d\theta d\varphi,$$

где согласно работам Бете [17], Мольер [18] и Гаудсмита и Саундерсона [19]

$$\rho_{GS}(\theta) = (f_0(\delta) + f_1(\delta)/V + f_2(\delta)/V^2) \cdot \sqrt{\theta/\sin\theta} \cdot (\chi_0^2 V),$$

$$\delta = \theta/(\chi_0 V^{1/2}), \quad f_0(\delta) = 2 \exp(-\delta^2).$$

Величины χ_0 и V зависят от параметров среды, пройденного пути и энергии электрона, f_1 и f_2 - некоторые функции, определенные и протабулированные в [17]. Вероятность рассеяния не зависит от φ , поэтому азимутальный угол разыгрывается равномерно в $[0, 2\pi]$: $\varphi = 2\pi\alpha$. Вероятность рассеяния на полярный угол θ представим в виде 2 сомножителей:

$$\rho_1(\theta) g(\theta), \quad \text{где } \rho_1(\theta) = (f_0(\delta) + f_1(\delta)/V + f_2(\delta)/V^2) \delta,$$

$$g(\theta) = (\sin\theta/\theta)^{1/2}.$$

Розыгрыш θ проходит в 2 этапа:

- 1) генерация θ с плотностью $\rho_1(\theta)$ согласно алгоритму Форда - Нельсона [20] (приведен также в [21]);
- 2) прием/отбраковка этого θ по обобщенному методу Неймана (А.5) с $g(\theta) = (\sin\theta/\theta)^{1/2}$.

В алгоритме Форда - Нельсона применяется смешанный метод (А.6). Так как $f_1(\delta)$ - знакопеременные функции и их нельзя использовать в качестве частных плотностей, в [20] из них образуются положительные комбинации:

$$\rho_1(\delta) = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot F_i(\delta) \cdot G_i(\delta),$$

где

$$a_1 = 1 - \lambda/V \quad F_1(\delta) = 2\delta \cdot \exp(-\delta^2) \quad G_1(\delta) = 1 \quad \delta \in [0, \infty);$$

$$a_2 = \mu_1 \mu_2 / V \quad F_2(\delta) = 1/\mu_1 \quad G_2(\delta) = (\lambda f_0(\delta) + f_1(\delta) + f_2(\delta)/V) \cdot \delta^{-1/2} \quad \delta \in [0, \mu_1];$$

$$a_3 = \mu_3 / (2\mu_1^2 V) \quad F_3(\delta) = 2\mu_1^2 / \delta^3 \quad G_3(\delta) = (\lambda f_0(\delta) + f_1(\delta) + f_2(\delta)/V) \cdot \delta^{-4} / \mu_3 \quad \delta \in (\mu_1, \infty).$$

Рекомендованные значения [20]: $\lambda=2$, $\mu_1=1$, $\mu_2=1,8$, $\mu_3=4,05$.

Алгоритм разыгрывания θ выглядит следующим образом:

(1) выбрасывание номера i : $r = a_1 \cdot \prod_{k=1}^3 a_k$ и нахождения i такого, что

$$a_0 \cdot a_1 + \dots + a_{i-1} \leq r < a_0 + a_1 + \dots + a_i \quad (a_0=0);$$

(2) розыгрыш δ по $F_1(\delta)$:

$$i=1: \quad \delta = [-\ln(1-a_2)]^{1/2} = [-\ln a_2]^{1/2} \quad (1-a \text{ и } a \text{ имеют одинаковое распределение);}$$

$$i=2: \quad \delta = \pi_2;$$

$$i=3: \quad \delta = 1/(a_2)^{1/2};$$

(3) отброска δ по $G_1(\delta)$: если $a_3 > G_1(\delta)$, вернемся на (1), если $a_3 \leq G_1(\delta)$ - на (4);

(4) $\theta = \delta \cdot \chi_c^{1/2}$; если $\theta > \pi$, вернемся на (1);

(5) если $a_4 > (\sin \theta / \pi)^{1/2}$, вернемся на (1), иначе - принимаем это значение θ .

7. ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА ОТ ДЕТЕКТОРА. Если известен коэффициент отражения $\eta(Z, E, \theta)$, зависящий от атомного номера вещества детектора Z , энергии электрона E и угла падения θ [22,23], то электрон считается отразившимся от детектора, если $\alpha \leq \eta$.

В заключение автор хотел бы выразить свою благодарность Л.Г.Здесенко за плодотворные обсуждения рассмотренных в этой работе вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Здесенко Ю.Г., Третьяк В.И. Расчет по методу Монте-Карло угловых и энергетических распределений электронов, прошедших через слои вещества (программа TRACK). - Киев, 1986. - 27 с. (Препр./АН УССР. Ин-т ядерных исслед.; КИЯИ-86-43).
2. Здесенко Ю.Г., Кропивянский Б.Н., Третьяк В.И. и др. Оценка возможностей изучения 2β -распада ^{100}Mo с помощью полупроводниковых детекторов. - Киев, 1989. - 28 с. (Препр./АН УССР. Ин-т ядерных исслед.; КИЯИ-89-7).
3. Кнут Д. Искусство программирования на ЭВМ. В 7 т. Т.2: Получисленные алгоритмы. - М.: Мир, 1977. - 726 с.
4. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. - 312 с.
5. Бусленко Н.П., Голенко Д.И., Соболев И.М. и др. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). - Л.: ГИТМЛ, 1962. - 332 с.
6. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. - 2-е изд. - М.: Наука, 1982. - 296 с.
7. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. - 2-е изд. - М.: Наука, 1975. - 472 с.
8. Шалыгин А.С., Палагин Ю.И. Прикладные методы статистического моделирования. - Л.: Машиностроение, 1986. - 320 с.
9. Neumann J. Various techniques used in connection with random digits//NBS Appl. Math. series. - 1951. - Vol.12. - P.36-38.
10. Butler J.W. Machine sampling from given probability distribution//Symp. on Monte Carlo Methods. Ed. Meyer H.A. - New York: Wiley, 1966. - P.249-264.
11. Kahn H. Applications of Monte Carlo//USAEC Report: No. AECU-3259. - Rand Corp., 1954.
12. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие. - Киев: Наук. думка, 1986. - 584 с.
13. Щепкин М.Г. Двойной бета распад и масса нейтрино//Успехи физических наук. - 1984. - Т.143, вып.4. - С.513-551.
14. Doi M., Kotani T., Nishiura H. et al. Neutrino mass, the right-handed interaction and the double beta decay//Progress

- of Theoretical Physios. - 1981. - Vol.66, N 5. - P.1739-1788.
15. Landau L.D. On the energy loss of fast particles by ionization//J.Phys.USSR. - 1944. - Vol.8. - P.201-205;
Ландау Л.Д. О потерях энергии быстрыми частицами на ионизацию.//Собр. тр. В 2 т. - М.: Наука, 1969. - Т.1. - С.482-500.
 16. Findlay D.J.S., Dubautoy A.R. Improvements to the Blunok-Leisegang energy loss straggling distribution//Nucl. Instr.Meth. - 1980. - Vol.174. - P.531-533.
 17. Bethe H.A. Moller's theory of multiple scattering//Phys. Rev. - 1953. - Vol.89. - P.1256-1266.
 18. Moliere G. Theorie der streuung schneller geladener. Teilohen I. Einzelstreuung am abgeschirmten Coulomb-feld//Z.Naturf. - 1947. - Vol.2a. - P.133-145;
Theorie der streuung schneller geladener. Teilohen II. Mehrfach- und vielfachstreuung//Z.Naturf. - 1948. - Vol.3a. - P.78-97.
 19. Goudsmith S.A., Saunderson J.L. Multiple scattering of electrons//Phys.Rev. - 1940. - Vol.57. - P.24-29; - 1940. - Vol.58. - P.36-42.
 20. Ford R.L., Nelson W.R. The EGS code system: Computer program for the Monte Carlo simulation of electromagnetic cascade showers (Version 3)//SLAC Report: N 210. - 1978;
Nelson W.R., Hirayama H., Rogers D.W.O. The EGS4 code system //SLAC Report: N 265, UC-32 (E/I/A). - 1985. - 381 p.
 21. Калиновский А.Н., Мохов Н.В., Никитин Ю.П. Прохождение частиц высоких энергий через вещество. - М.: Энергоатомиздат, 1985. - 248 с.
 22. Tabata T., Ito R., Okabe S. An empirical equation for the backscattering coefficients of electrons//Nucl.Instrum.Meth. - 1971. - Vol.94. - P.509-513.
 23. Kuzminikh V.A., Vorobiev S.A. Backscattering coefficients calculation of monoenergetic electrons and positrons//Nucl. Instrum.Meth. - 1975. - Vol.129. - P.561-563.

Научное издание

ТРЕТЯК Владимир Ильич

АЛГОРИТМЫ МОНТЕ-КАРЛО В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ
2 β -РАСПАДА И ПРОХОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

Редактор Л.Н.Троян

Подп. в печ. 21.05.92. Формат 60x90/16. Бум. офс. н 2. Офс. печ.
Усл. печ. л. 0,8. Уч.-изд. л. 0,7. Тираж 160 экз. Заказ 1/0
Цена 10 к.

ОКТЕ с ЭИ Института ядерных исследований АН Украины
252028, Киев-28, проспект Науки, 47
